مراجعة ليلة الامتحان فى الجبر

زكى محمد زكى العجمي

المراجعة النهائية في الجبر

مثال: إذا كان $ل^{ن}_{٥} = ٤٢ \times ل^{ن-٢}_{٣}$ فما قيمة ن

الحل

ن (ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤) = ٤٢ (ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)

ن(ن-١) = ٤٢ ∴ ن^{٢} – ن – ٤٢ = ٠ ∴ (ن – ٧)(ن +٦) = ٠

ن = ٧ ن = -٦(مرفوض)

مثال: إذا كان $ق^{ن}_{٣} : ق^{ن+٢}_{٤} = ٥ : ١٨$ فما قيمة ن ؟

الحل

$$\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-٣ \; \lfloor ٣} \times \frac{\lfloor ن+٢-٤ \; \lfloor ٤}{\lfloor ن+٢} = \frac{٥}{١٨}$$

$$\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-٣ \; \lfloor ٣} \times \frac{\lfloor ن-٢ \; \lfloor ٤}{\lfloor ن+٢} = \frac{٥}{١٨}$$

$$\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-٣ \; \lfloor ٣} \times \frac{(ن-٢) \; \lfloor ن-٣ \times ٤ \; \lfloor ٣}{(ن+٢)(ن+١) \; \lfloor ن} = \frac{٥}{١٨}$$

$$\frac{٤ن-٨}{ن^{٢}+٣ن+٢} = \frac{٥}{١٨} \quad \therefore$$

٥ ن^{٢} +١٥ن +١٠ = ٧٢ن – ١٤٤ ∴٥ن^{٢} – ٥٧ ن +١٥٤ = ٠

(ن – ٧)(٥ ن – ٢٢) = ٠ ∴ ن = ٧ ن = $\frac{٢٢}{٥}$ (مرفوض)

مثال :إذا كان $ل_{٢}^{م+ن} = ٢١٠$ ، $ق_{٣}^{ن-٣} = ٣٥$ أوجد قيمتي م ، ن

الحل

$ل_{٢}^{م+ن} = ٢١٠ = ١٥ \times ١٤$

$م + ن = ١٥$

$ق_{٣}^{ن-٣} = ٣٥$

$\frac{(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)}{١ \times ٢ \times ٣} = ٣٥$

$(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥) = ٧ \times ٦ \times ٥$

$ن - ٣ = ٧$ $\quad$ $ن = ١٠$

بالتعويض فى المعادلة الاولى نجد أن

$م + ١٠ = ١٥$ $\quad$ $م = ٥$

مثال: إذا كان $ق_{٣}^{ن} : ق_{٤}^{ن-١} = ٨ : ٥$ أوجد قيمة ن

الحل

$\frac{ق_{٣}^{ن}}{ق_{٤}^{ن-١}} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{\lfloor ن}{\lfloor ٣ \, \lfloor ن - ٣} \times \frac{\lfloor ٤ \, \lfloor ن - ٥}{\lfloor ن - ١} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{ن \, \lfloor ن - ١}{\lfloor ٣ \, (ن-٣)(ن-٤) \, \lfloor ن-٥} \times \frac{٤ \, \lfloor ٣ \, \lfloor ن - ٥}{\lfloor ن - ١} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{٤ن}{ن^{٢} - ٧ن + ١٢} = \frac{٨}{٥}$

$٨ن^{٢} - ٥٦ن + ٩٦ = ٢٠ن$

$٨ن^{٢} - ٧٦ن + ٩٦ = ٠$ $\quad$ $\div ٤$

$٢ن^{٢} - ١٩ن + ٢٤ = ٠$

$(٢ن-٣)(ن - ٨) = ٠$

$ن = ٨$

مثال: إذا كان $ق_{٩}^{ن} > ق_{٨}^{ن}$ اثبت أن $ن > ١٧$

$\because ق_{٩}^{ن} > ق_{٨}^{ن} \quad \therefore \frac{ق_{٩}^{ن}}{ق_{٨}^{ن}} > ١$

$\frac{ن - ٩ + ١}{٩} > ١ \therefore ن > ٩ + ٨ \quad \therefore ن > ١٧$

مثال: إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢}$ = ٣ : ٨ : ١٤ أوجد قيمة ن ، ر

$$\frac{^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{٨}{٣}$$

$$\frac{ن - ر}{ر+١} = \frac{٨}{٣}$$

٣ن – ٣ر = ٨ر + ٨

٣ن – ١١ر = ٨ (١)

$$\frac{^{ن}ق_{ر+٢}}{^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{١٤}{٨}$$

$$\frac{ن - ر - ١}{ر + ٢} = \frac{٧}{٤}$$

٤ن – ٤ر – ٤ = ٧ر + ١٤

٤ن – ١١ر = ١٨ (٢)

بحل المعادلتين معا

٤ن – ١١ر = ١٨

٣ن – ١١ر = ٨

بالطرح

ن = ١٠

بالتعويض فى الاولى

٣×١٠ – ١١ر = ٨

-١١ر = ٨ – ٣٠ = -٢٢

ر = ٢

مثال: إذا كان معاملا الحدين الرابع والسادس من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ هما ٣٥ ، ٢١ على الترتيب فما قيمة ن

الحل

معامل $ح_{٤} = {}^{ن}ق_{٣} = ٣٥$

$$\frac{ن(ن - ١)(ن - ٢)}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$$

ن (ن – ١)(ن – ٢) = ٢١٠

معامل $ح_{٦} = {}^{ن}ق_{٥} = ٢١$

$$\frac{ن(ن - ١)(ن - ٢)(ن-٣)(ن-٤)}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٢١$$

ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)=٢٥٢٠

$$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)}{ن(ن-١)(ن-٢)} = \frac{٢٥٢٠}{٢١٠}$$

(ن – ٣)(ن – ٤) = ١٢

$ن^{٢}$ – ٧ن + ١٢ = ١٢

$ن^{٢}$ – ٧ن = ٠

ن (ن – ٧) = ٠

ن = ٠ أو ن = ٧

مثال: أوجد معامل $س^{١٥}$ والحد الخالي من س فى مفكوك $(س^{٣} + \frac{٣}{س^{٢}})^{١٠}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} (\frac{٣}{س^{٢}})^{ر} (س^{٣})^{١٠-ر} = {}^{١٠}ق_{ر}\ ٣^{ر}\ س^{-٢ر} \times س^{٣٠-٣ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر}\ ٣^{ر} \times س^{٣٠-٥ر}$

لا يجاد الحد المشتمل على $س^{١٥}$ نضع

$س^{٣٠-٥ر} = س^{١٥}$

$٣٠ - ٥ر = ١٥$

$-٥ر = ١٥ - ٣٠ = -١٥$

$ر = ٣$

الحد المشتمل على $س^{١٥}$ هو $ح_{٤}$

معامل $ح_{٤} = {}^{١٠}ق_{٣} \times ٣^{٣} = ٣٢٤٠$

لا يجاد الحد الخالي من س نضع

$س^{٣٠-٥ر} = س^{٠}$

$٣٠ - ٥ر = ٠$

$٥ر = ٣٠$

$ر = ٦$

الحد الخالي من س هو $ح_{٧}$

$ح_{٧} = {}^{١٠}ق_{٦} \times ٣^{٦} = ١٥٣٠٩٠$

مثال: في مفكوك $(س^{٢} + \frac{أ}{س})^{٥}$ أذا كان معامل س يساوى ٨٠ فما قيمة أ

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} (\frac{أ}{س})^{ر} (س^{٢})^{٥-ر} = {}^{٥}ق_{ر}\ أ^{ر}\ س^{-ر} \times س^{١٠-٢ر}$

$= {}^{٥}ق_{ر}\ أ^{ر} \times س^{١٠-٣ر}$

لا يجاد الحد المشتمل على س نضع

$س^{١٠-٣ر} = س$

$١٠ - ٣ر = ١$

$٣ر = ٩$

$ر = ٣$

الحد المشتمل على س هو $ح_{٤}$

معامل $ح_{٤} = ٨٠$

${}^{٥}ق_{٣}\ أ^{٣} = ٨٠$

$١٠\ أ^{٣} = ٨٠$

$أ^{٣} = ٨$

$أ = ٢$

مثال: إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فأثبت أنه لا يوجد حد خال من س في مفكوك

$(س^{٥} + \frac{١}{س^{٢}})^{ن}$ إلا إذا كانت ن = ٧ أو مكررا لها ثم أوجد رتبة وقيمة الحد الخالي من س عندما تكون ن = ١٤

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} (\frac{١}{س})^{ر} (س^{٥})^{ن-ر} = {}^{ن}ق_{ر}\ س^{-٢ر} \times س^{٥ن - ٥ر} = {}^{ن}ق_{ر}\ س^{٥ن - ٧ر}$

لا يجاد رتبة الحد الخالي من س نضع

$س^{٥ن - ٧ر} = س^{٠}$

$٥ن - ٧ر = ٠$

$٧ر = ٥ن$

$ر = \frac{٥ن}{٧}$

لكى يوجد حد خال من س لابد من أن تكون ر عدد صحيح موجب وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت ن = ٧ أو مكررا لها

عندما ن = ١٤

$ر = \frac{٥ \times ١٤}{٧} = ١٠$

رتبة الحد الخالي من س هو $ح_{١١}$

$ح_{١١} = {}^{١٤}ق_{١٠} = {}^{١٤}ق_{٤} = ١٠٠١$

مثال: في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاث حدود متتالية كنسبة ١٥ : ٤٢ : ٩١ على الترتيب فما قيمة ن وما ترتيب هذه الحدود

الحل نفرض أن هذه الحدود $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{٤٢}{١٥}$ ∴ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{١٤}{٥}$

$٥ن - ٥ر + ٥ = ١٤ر$

$٥ن - ١٩ر = -٥$ (١)

$\frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}} = \frac{٩١}{٤٢}$ ∴ $\frac{ن - (ر+١) + ١}{ر+١} = \frac{٩١}{٤٢}$

$\frac{ن - ر}{ر+١} = \frac{١٣}{٦}$

بحل المعادلتين معا

$٦ن - ١٩ر = ١٣$

$٥ن - ١٩ر = -٥$

$ن = ١٨$

$٦ \times ١٨ - ١٩ر = ١٣$

$١٠٨ - ١٩ر = ١٣$

$-١٩ر = ١٣ - ١٠٨$ ∴ $ر = ٥$

الحدود هى $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$

مثال :أوجد مجموعة الحل للمعادلة س^{٢} – ٢س + ٤ = ٠

أ = ١ ب = -٢ جـ = ٤

ب^{٢} – ٤ أ جـ = ٤ – ٤ × ١ × ٤ = ٤ – ١٦ = -١٢ = ١٢ × -١ = ١٢ ت^{٢}

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{١٢ ت^{٢}}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٣} ت}{٢} = ١ \pm \sqrt{٣} ت$

مثال: **إذا كان ل = $\frac{٢+ت}{١+ت}$ ، م = $\frac{١+٢ت}{١+ت}$ اثبت أن ل ، م مترافقان ثم أحسب قيمة $\frac{١٥ (ل^{٢} + م^{٢})}{٨ل م (ل + م)}$**

الحل

ل = $\frac{٢+ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{٢ - ت - ت^{٢}}{١ - ت^{٢}} = \frac{٣ - ت}{٢} = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} ت$

م = $\frac{١+٢ت}{١+ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{١ + ت - ٢ت^{٢}}{١ - ت^{٢}} = \frac{٣ + ت}{٢} = \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} ت$

ل+ م = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ ، ل م = $\frac{٩}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١٠}{٤} = ٢,٥$

ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ ل م = ٩ – ٢ × ٢,٥ = ٩ – ٥ = ٤

ل م (ل + م) = ٢,٥ × ٣ = ٧,٥

المقدار = $\frac{١٥ \times ٤}{٨ \times ٧,٥} = \frac{٦٠}{٦٠} = ١$

مثال: إذا كانت ٢س + ٦ ت ص – ١٤ – ت س + ت = ٠ أوجد س ، ص

الحل

(٢ س – ١٤) + (٦ص – س +١) ت = ٠

٢س – ١٤ = ٠	٦ ص – س + ١ = ٠
٢س = ١٤	٦ص – ٧ + ١ = ٠
س = ٧	٦ص – ٦ = ٠ ∴ ٦ص = ٦ ∴ ص = ١

مثال: أوجد $\left(\frac{١ - \sqrt{٣}\,ت}{١ + \sqrt{٣}\,ت}\right)^{٦}$ بالصورتين المثلثية والجبرية

الحل $١ - \sqrt{٣}\,ت = ٢\left(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right) = ٢\,(\text{جتا}\,٣٠٠ + ت\,\text{جا}\,٣٠٠)$

$١ + \sqrt{٣}\,ت = ٢\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right) = ٢\,(\text{جتا}\,٦٠ + ت\,\text{جا}\,٦٠)$

$\frac{١ - \sqrt{٣}\,ت}{١ + \sqrt{٣}\,ت} = \frac{٢\,(\text{جتا}\,٣٠٠ + ت\,\text{جا}\,٣٠٠)}{٢\,(\text{جتا}\,٦٠ + ت\,\text{جا}\,٦٠)} = \text{جتا}\,٢٧٠ + ت\,\text{جا}\,٢٧٠$

$\left(\frac{١ - \sqrt{٣}\,ت}{١ + \sqrt{٣}\,ت}\right)^{٦} = (\text{جتا}\,٢٧٠ + ت\,\text{جا}\,٢٧٠)^{٦} = (\text{جتا}\,٦ \times ٢٧٠ + ت\,\text{جا}\,٦ \times ٢٧٠)$

$= \text{جتا}\,١٤٤٠ + ت\,\text{جا}\,١٤٤٠ = \text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠ = ١$

مثال: أوجد مجموعة الحل للمعادلة $س^{٥} - ١ = ٠$ في ك

الحل

$س^{٥} - ١ = ٠$ $\qquad$ $س^{٥} = ١ = \text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠$

$س = (\text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠)^{\frac{١}{٥}} = \left(\text{جتا}\,\frac{٠ + ٢ر ط}{٥} + ت\,\text{جا}\,\frac{٠ + ٢ر ط}{٥}\right)$

نضع $ر = ٠$ $\therefore$ $س_{١} = \text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠ = ١$

نضع $ر = ١$ $\therefore س_{٢} = \text{جتا}\,\frac{٢ \times ١ \times ط}{٥} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢ \times ١ \times ط}{٥} = \text{جتا}\,٧٢ + ت\,\text{جا}\,٧٢$

نضع $ر = ٢$ $\therefore س_{٢} = \text{جتا}\,\frac{٢ \times ٢ \times ط}{٥} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢ \times ٢ \times ط}{٥} = \text{جتا}\,١٤٤ + ت\,\text{جا}\,١٤٤$

نضع $ر = ٣$ $\therefore س_{٢} = \text{جتا}\,\frac{٢ \times ٣ \times ط}{٥} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢ \times ٣ \times ط}{٥} = \text{جتا}\,٢١٦ + ت\,\text{جا}\,٢١٦$

نضع $ر = ٤$ $\therefore س_{٢} = \text{جتا}\,\frac{٢ \times ٤ \times ط}{٥} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢ \times ٤ \times ط}{٥} = \text{جتا}\,٢٨٨ + ت\,\text{جا}\,٢٨٨$

مثال: حل المعادلة $س^{٤} + ١ = ٠$ وضع الحل فى الصورة الاسية

الحل

$س^{٤} + ١ = ٠ \quad \therefore \quad س^{٤} = -١ = جتا ١٨٠ + ت\ جا ١٨٠$

$س = (جتا ط + ت\ جا ط)^{\frac{١}{٤}} = جتا \frac{ط + ٢ر ط}{٤} + ت\ جا \frac{ط + ٢ر ط}{٤}$

$= هـ^{\frac{ط + ٢ر ط}{٤} ت}$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

بوضع ر = ٠ ∴ $س_{١} = هـ^{\frac{ط}{٤} ت}$ ، بوضع ر = ٢ ∴ $س_{٣} = هـ^{\frac{٥ط}{٤} ت}$

بوضع ر = ١ ∴ $س_{٢} = هـ^{\frac{٣ط}{٤} ت}$ ، بوضع ر = ٣ ∴ $س_{٤} = هـ^{\frac{٧ط}{٤} ت}$

مثال: اثبت أن $(١ - ٢ \omega + \omega^{٢})(١ + \omega - ٥ \omega^{٢}) = ١٨$

الحل الطرف الايمن $= (١ + \omega^{٢} - ٢\omega)(١ + \omega - ٥ \omega^{٢})$

$= (-\omega - ٢\omega)(-\omega^{٢} - ٥ \omega^{٢}) = -٣\omega \times -٦\omega^{٢} = ١٨\omega^{٣} = ١٨$

مثال: اثبت أن $(٥ - \frac{٣}{\omega^{٢}} + ٥ \omega^{٢})(٢ + \frac{٣}{\omega + ١^{٢}} + ٢ \omega) = ٤٠$

الحل

الايمن $= (٥ - \frac{٣\omega^{٣}}{\omega^{٢}} + ٥ \omega^{٢})(٢ + \frac{٣\omega^{٣}}{-\omega} + ٢ \omega)$

$= (٥ - ٣ \omega + ٥ \omega^{٢})(٢ - ٣ \omega^{٢} + ٢ \omega)$

$= [٥(١ + \omega^{٢}) - ٣ \omega][٢(١ + \omega) - ٣ \omega^{٢}]$

$= [٥ \times -\omega - ٣ \omega][٢ \times -\omega^{٢} - ٣ \omega^{٢}]$

$= [-٥\omega - ٣ \omega][-٢\omega^{٢} - ٣ \omega^{٢}] = -٨ \omega \times -٥\omega^{٢} = ٤٠\omega^{٣} = ٤٠$

مثال: اثبت أن $\frac{\text{٣} + \omega}{\text{١} + \text{٣}\omega} + \frac{\text{٣} + \omega^{\text{٢}}}{\text{١} + \text{٣}\omega^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}}{\text{٧}}$

الحل

الايمن = $\frac{\text{٣} + \text{٩}\omega^{\text{٢}} + \omega + \text{٣}\omega^{\text{٣}} + \text{٣} + \text{٩}\omega + \omega^{\text{٢}} + \text{٣}\omega^{\text{٣}}}{(\text{١} + \text{٣}\omega)(\text{١} + \text{٣}\omega^{\text{٢}})}$

$= \frac{\text{١٢} + \text{١٠}\omega^{\text{٢}} + \text{١٠}\omega}{\text{١} + \text{٣}\omega^{\text{٢}} + \text{٣}\omega + \text{٩}\omega^{\text{٣}}} = \frac{\text{١٢} + \text{١٠}(\omega^{\text{٢}} + \omega)}{\text{١٠} + \text{٣}(\omega^{\text{٢}} + \omega)} = \frac{\text{١٢} + \text{١٠} \times \text{-١}}{\text{١٠} + \text{٣} \times \text{-١}} = \frac{\text{٢}}{\text{٧}}$

مثال: اثبت أن $\left(\frac{\text{٢} + \omega}{\text{١} + \text{٢}\omega^{\text{٢}}} - \frac{\text{٣} - \omega^{\text{٢}}}{\text{١} - \text{٣}\omega}\right)^{\text{٨}} = \text{٨١}$

الحل

الايمن = $\left(\frac{\omega + \text{٢}\omega^{\text{٣}}}{\text{١} + \text{٢}\omega^{\text{٢}}} - \frac{\text{٣}\omega^{\text{٣}} - \text{٣}}{\text{١} - \text{٣}\omega}\right)^{\text{٢}} = \left(\frac{\omega(\text{١} + \text{٢}\omega^{\text{٢}})}{\text{١} + \text{٢}\omega^{\text{٢}}} - \frac{\omega^{\text{٢}}(\text{١} - \text{٣}\omega)}{\text{١} - \text{٣}\omega}\right)^{\text{٢}}$

$= (\omega - \omega^{\text{٢}})^{\text{٨}} = (\pm \sqrt{\text{٣}}\ \text{ت})^{\text{٨}} = \text{٨١}$

مثال: كون معادلة الدرجة الثانية والتي جذراها $\frac{\text{١}}{\text{١} + \omega}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{١} + \omega^{\text{٢}}}$

الحل

الجذران $\frac{\omega^{\text{٣}}}{-\omega^{\text{٢}}}$ ، $\frac{\omega^{\text{٣}}}{-\omega} = -\omega$ ، $-\omega^{\text{٢}}$

مجموع الجذران = $-\omega - \omega^{\text{٢}} = \text{-١}(\omega + \omega^{\text{٢}}) = \text{-١} \times \text{-١} = \text{١}$

ضرب الجذران = $-\omega \times -\omega^{\text{٢}} = \omega^{\text{٣}} = \text{١}$

المعادلة هي $\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{١} = \text{٠}$

مثال: بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & ب & جـ \\ أ^{٢} & ب^{٢} & جـ^{٢} \end{vmatrix} = (أ - ب)(ب - جـ)(جـ - أ)$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^{٢} \\ ١ & ب & ب^{٢} \\ ١ & جـ & جـ^{٢} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^{٢} \\ ٠ & ب - أ & ب^{٢} - أ^{٢} \\ ٠ & جـ - أ & جـ^{٢} - أ^{٢} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^{٢} \\ ٠ & ب - أ & (ب - أ)(ب + أ) \\ ٠ & جـ - أ & (جـ - أ)(جـ + أ) \end{vmatrix}$$

$$= (ب - أ)(جـ - أ) \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^{٢} \\ ٠ & ١ & ب + أ \\ ٠ & ١ & جـ + أ \end{vmatrix} = (ب - أ)(جـ - أ) \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^{٢} \\ ٠ & ١ & ب + أ \\ ٠ & ٠ & جـ - ب \end{vmatrix}$$

$$= (ب - أ)(جـ - أ)(جـ - ب) == (أ - ب)(ب - جـ)(جـ - أ)$$

مثال: بدون فك اثبت أن

$$\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ أ & ب & س \end{vmatrix} = (س + أ + ب)(س - أ)(س - ب)$$

ع١+ع٢+ع٣ الحل

$$= \begin{vmatrix} س + أ + ب & أ & ب \\ س + أ + ب & س & ب \\ س + أ + ب & ب & س \end{vmatrix} = (س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ١ & س & ب \\ ١ & ب & س \end{vmatrix} \begin{matrix} ع_{٢} - أ\, ع_{١} \\ ع_{٣} - ب\, ع_{١} \end{matrix}$$

$$= (س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & س - أ & ٠ \\ ١ & ب - أ & س - ب \end{vmatrix} = (س + أ + ب)(س - أ)(س - ب)$$

مثال: بدون فك اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & -\text{ب} & -\text{جـ} \\ \text{ب} & ١ & ٠ \\ \text{جـ}^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \text{أ} + \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٣}$$

الحل

$$\text{ص}_{١} + \text{ب ص}_{٢} + \text{جـ ص}_{٣} = \begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٣} & ٠ & ٠ \\ \text{ب} & ١ & ٠ \\ \text{جـ}^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \text{أ} + \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٣}$$

مثال: بدون فك اثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & ١ + \text{ب}^{٢} & \text{ب جـ} \\ \text{جـ} & \text{ب جـ} & ١ + \text{جـ}^{٢} \end{vmatrix} = ١$$

الحل

$$\text{ع}_{٢} - \text{ب ع}_{١} \qquad \text{ع}_{٣} - \text{جـ ع}_{١} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{ب} & ١ & ٠ \\ \text{جـ} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١$$

مثال: بدون فك اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ} + \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{أ} + \text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{أ} + \text{ع} \end{vmatrix} = \text{أ}^{٢} (\text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع})$$

الحل

$$\text{ع}_{١}+\text{ع}_{٢}+\text{ع}_{٣}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{أ} + \text{ص} & \text{ع} \\ \text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{ص} & \text{أ} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

$$(\text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ص} & \text{ع} \\ ١ & \text{أ} + \text{ص} & \text{ع} \\ ١ & \text{ص} & \text{أ} + \text{ع} \end{vmatrix} \quad \text{ص}_{٢}-\text{ص}_{١}، \text{ص}_{٣}-\text{ص}_{١}$$

$$= (\text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ص} & \text{ع} \\ ٠ & \text{أ} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{أ}^{٢} (\text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع})$$

مثال: بدون فك اثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ب\,جـ & جـ\,أ + أ\,ب \\ ١ & جـ\,أ & أ\,ب + ب\,جـ \\ ١ & أ\,ب & أ\,جـ + جـ\,ب \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

ع٣+ ع٢

$$= \begin{vmatrix} ١ & ب\,جـ & ب\,جـ + جـ\,أ + أ\,ب \\ ١ & جـ\,أ & ب\,جـ + جـ\,أ + أ\,ب \\ ١ & أ\,ب & ب\,جـ + جـ\,أ + أ\,ب \end{vmatrix}$$

$$(ب\,جـ + جـ\,أ + أ\,ب)\begin{vmatrix} ١ & ب\,جـ & ١ \\ ١ & جـ\,أ & ١ \\ ١ & أ\,ب & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

مثال: بدون فك المحدد أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$\begin{vmatrix} ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ١ & س \\ ١ & س^{٢} - ٢ & ٤ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

نبدل ع٢ مع ع٣ ص٣ – ص ١

$$= -\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٠ & س & ١ \\ ١ & ٤ & س^{٢} - ٢ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٠ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & س^{٢} - ٩ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$-س\,(س^{٢} - ٩) = ٠$ ∴ $س = ٠$ أو $س^{٢} = ٩$ ∴ $س = \pm ٣$

∴م ٠ ح = { ٠ ، ٣ ، -٣ }

مثال: إذا كان (س – ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} \text{س}-١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & \text{س}+١ \\ -١ & ١ & \text{س}+\text{ك} \end{vmatrix}$ فأوجد قيمة ك

الحل

(س – ١) أحد عوامل المحدد ∴ عندما س = ١ ∴ المحدد = صفر

$$\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ -١ & ١ & ١+\text{ك} \end{vmatrix} = ٠ \quad \therefore \quad - \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١ & -١ & ١+\text{ك} \end{vmatrix} = ٠$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & \text{ك} \end{vmatrix} = ٠ \quad \therefore \quad \text{ع}_٣ - \text{ع}_٢ \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & \text{ك}+١ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ (ك + ١) = ٠ ∴ ك = -١

مثال: باستخدام طريقة كرا مر أوجد مجموعة الحل للمعادلات الاتية

س – ص + ع = ٢ ، ٢س+٣ص- ع =٥ ، ٣س – ٥ص + ٢ع = -١

الحل

$$\triangle = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix}$$

$$= (٦ - ٥) + (٤ + ٣) + (-١٠ - ٩) = ١ + ٧ - ١٩ = -١١$$

$$\triangle_{س} = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ٥ & ٣ & -١ \\ -١ & -٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} ٥ & -١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ -١ & -٥ \end{vmatrix}$$

$$= ٢ (٦ - ٥) + (١٠ - ١) + (-٢٥ + ٣) = ٢ + ٩ - ٢٢ = -١١$$

$$\triangle_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ & -١ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} ٥ & -١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= (١٠ - ١) - ٢ (٤ + ٣) + (-٢ - ١٥) = ٩ - ١٤ - ١٧ = -٢٢$$

$$\triangle_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٣ & -٥ & -١ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ -٥ & -١ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix}$$

$$= (-٣ + ٢٥) + (-٢ - ١٥) + ٢ (-١٠ - ٩) = ٢٢ - ١٧ - ٣٨ = -٣٣$$

$$س = \frac{\triangle_{س}}{\triangle} = \frac{-١١}{-١١} = ١ \qquad ص = \frac{\triangle_{ص}}{\triangle} = \frac{-٢٢}{-١١} = ٢$$

$$ع = \frac{\triangle_{ع}}{\triangle} = \frac{-٣٣}{-١١} = ٣ \quad \therefore \quad م \cdot ح = \{ (١ ، ٢ ، ٣) \}$$

مثال: باستخدام طريقة كر امر أوجد مجموعة الحل للمعادلات الاتية

س + ص = ١ ، ٣ص- ع =-٤ ، س + ع = ٣

الحل

$$\triangle = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ١- \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ١- \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٠ & ١- \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (٣ - ٠) - (٠ + ١) = ٣ - ١ = ٢$$

$$\triangle_{س} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٤- & ٣ & ١- \\ ٣ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} ٣ & ١- \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} - (١) \begin{vmatrix} ٤- & ١- \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= (٣ - ٠) - (٤- + ٣) = ٣ - (١-) = ٣ + ١ = ٤$$

$$\triangle_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٤- & ١- \\ ١ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} ٤- & ١- \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ٠ & ١- \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= (٤- + ٣) - (٠ + ١) = ١- - ١ = ٢-$$

$$\triangle_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٣ & ٤- \\ ١ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} ٣ & ٤- \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} - (١) \begin{vmatrix} ٠ & ٤- \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= (٩ - ٠) - (٠ + ٤) + (٠ - ٣) = ٩ - ٤ - ٣ = ٢$$

$$س = \frac{\triangle_{س}}{\triangle} = \frac{٤}{٢} = ٢ \qquad ص = \frac{\triangle_{ص}}{\triangle} = \frac{٢-}{٢} = ١-$$

$$ع = \frac{\triangle_{ع}}{\triangle} = \frac{٢}{٢} = ١ \qquad م ٠ ح = \{ (٢ ، ١- ، ١) \}$$